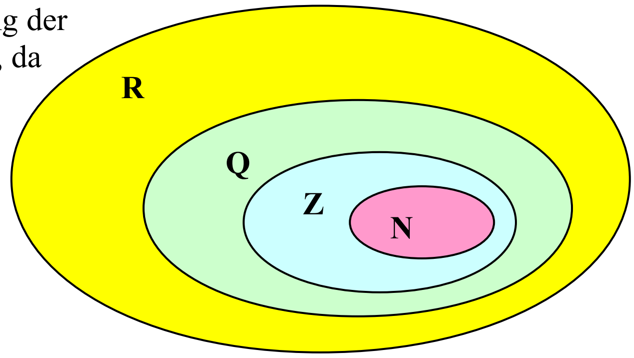
Grundwissen Mathematik 9.Klasse
Gymnasium SOB

1.Weiterentwicklung der Zahlvorstellung

- Definition der Quadratwurzel: Für $a \geq 0$ ist $\sqrt{a}$ diejenige nicht negative Zahl deren Quadrat a ergibt. $\sqrt{a}$ heißt Quadratwurzel, a heißt Radikand.
- Beispiele: $\sqrt{0,25} = 0,5$ $\sqrt{64} = 8$
- Reelle Zahlen stellen eine Erweiterung der rationalen Zahlen dar. Diese ist nötig, da z.B. $\sqrt{2}$ nicht in **Q** liegt. Jeder unendliche nichtperiodische Dezimalbruch ist irrational, es gibt keine Bruchdarstellung für ihn, π ist irrational. Die reellen Zahlen **R** umfassen die rationalen und die irrationalen Zahlen.

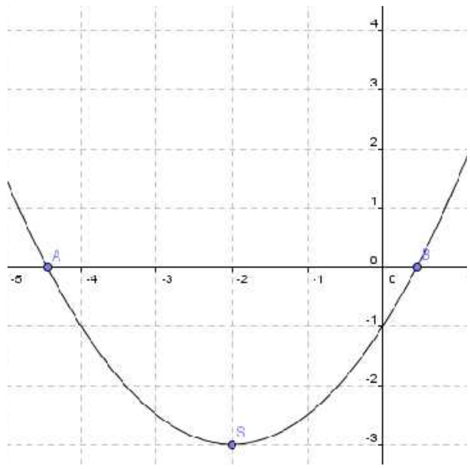


- $\sqrt{a^2} = a$ *für* $a \geq 0$
- $\sqrt{a^2} = -a$ *für* $a < 0$
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
- $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$
- Achtung! $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7 \neq 5 = \sqrt{25}$

2.Funktionale Zusammenhänge

2.1.Graphen quadratischer Funktionen und ihre Nullstellen

- 1.Binomische Formel: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- 2.Binomische Formel: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- 3.Binomische Formel: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- Der Graph einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ heißt Parabel.
- Beispiel: Graph für $f(x) = 0,5x^2 + 2x – 1$
- Der tiefste bzw. höchste Punkt einer Parabel wird Scheitel S genannt.
- Die Stellen an denen der Graph die x – Achse schneidet heißen Nullstellen.
- Falls $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet.
- Falls $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet.
- Falls $|a| > 1$ ist, erhält man eine engere Parabel.
- Falls $|a| < 1$ ist, erhält man eine weitere Parabel.



2.2.Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

- Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ heißt quadratische Gleichung.
- Durch **quadratische Ergänzung** kann man sie auf Scheitelpunktform bringen und lösen.
- Beispiel: $0{,}75x^2 + 4{,}5x + 3 = 0$ | 0,75 ausklammern
  $0{,}75\,[x^2 + 6x + 4] = 0$ | quadratisch ergänzen
  $0{,}75\,[x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 + 4] = 0$ | binomische Formel
  $0{,}75\,[(x + 3)^2 - 5] = 0$ | ausmultiplizieren liefert die Scheitelpunktform
  $0{,}75\,(x + 3)^2 - 3{,}75 = 0$ | Auflösen nach x
  $(x + 3)^2 = 3{,}75 : 0{,}75$
  $(x + 3)^2 = 5$
  $x_1 = \sqrt{5} - 3 \quad x_2 = -\sqrt{5} - 3$
- Aus der Scheitelpunktform $f(x) = a(x - d)^2 + e$ lassen sich der Scheitel S(d/e), die Verschiebung der Parabel in x – Richtung um d und die Verschiebung in y – Richtung um e direkt ablesen.
- Die Bestimmung der Nullstellen kann neben der quadratischen Ergänzung mit der **Lösungsformel** erfolgen: $\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$
- Der Radikand in der Lösungsformel wird Determinante D genannt und gibt die Anzahl der Lösungen an. Für $D > 0$ gibt es zwei Lösungen, für $D = 0$ eine Lösung und für $D < 0$ keine Lösung.

2.3.Anwendungen

- Extremwertprobleme
- Schnittpunktbestimmung von zwei Parabeln, Parabel und Gerade und Gerade und Hyperbel.
- Einfache Bruchgleichungen

3.Erweiterung des Potenzbegriffs

3.1.n – te Wurzeln

- Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a}$ diejenige nicht negative Zahl, deren n – te Potenz a ergibt: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. $\sqrt[n]{a}$ heißt **n- te Wurzel** aus a ($n \in$ N, $n \geq 2$)
- Beispiele: $\sqrt[3]{27} = 3$
  $x^3 = -8 \rightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$
  $x^4 = 16 \rightarrow x_1 = 2$ und $x_2 = -2$

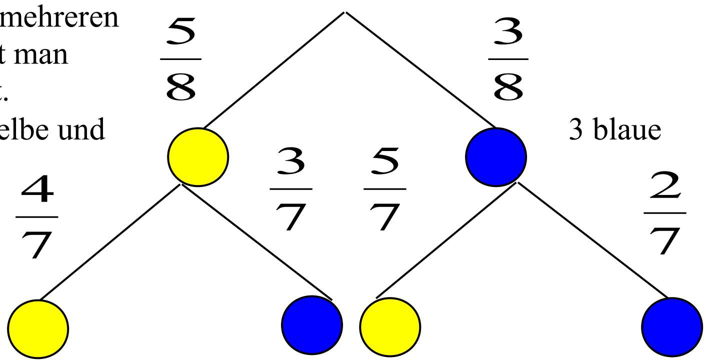
3.1.Potenzen mit rationalen Exponenten

- Definition: Für positive Basen gilt: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \quad a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} \quad a^{-p/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$
- Rechenregeln für r und s aus **Q** und a und b aus $\mathbf{R}^+$:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad a^r : a^s = a^{r-s} \quad \left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s} \quad a^r \cdot b^r = (ab)^r \quad a^r : b^r = (a : b)^r$$

4.Zusammengesetzte Zufallsexperimente

- Ein Zufallsexperiment, das aus mehreren Teilexperimenten besteht, nennt man mehrstufiges Zufallsexperiment.
- Beispiel: In einer Urne sind 5 gelbe und 3 blaue Kugeln. Es werden nacheinander ohne Zurücklegen 2 Kugeln gezogen.

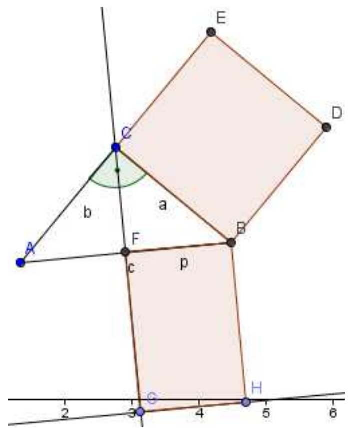


- 1.Pfadregel: Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die **Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses**, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm multipliziert: $P(g,b) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}$.
- 2.Pfadregel: Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses**, indem man die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade bildet, die zu dem Ereignis gehören: $P(\{(g,b),(b,b)\}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$.

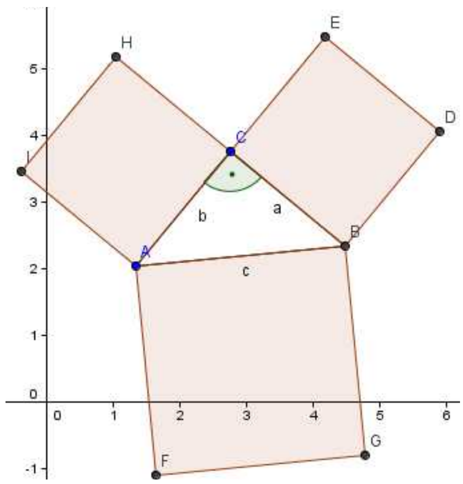
5.Das rechtwinklige Dreieck

5.1.Satzgruppe des Pythagoras

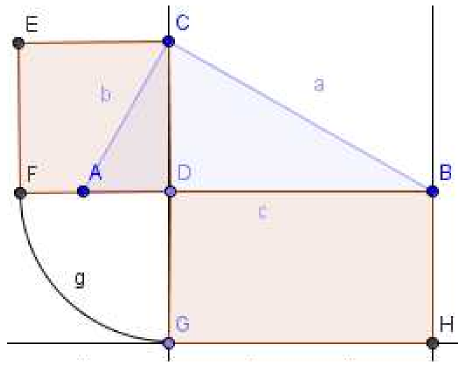
- **Kathetensatz:** Für jedes rechtwinklige Dreieck ist das Quadrat übereiner Kathete flächengleich zum Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt. $a^2 = c \cdot p$ $b^2 = c \cdot q$ Die Hypotenuse ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite. Die Katheten sind die anderen beiden Seiten. Die Höhe der Hypotenuse zerlegt diese in die Hypotenusenabschnitte.



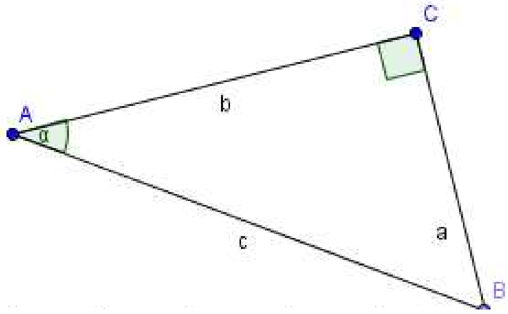
- **Satz des Pythagoras:** In jedem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse. $a^2 + b^2 = c^2$
- Kehrsatz zum Satz des Pytagoras: Wenn in einem Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.
- Diagonale d im Quadrat mit der Seitenlänge a: $d = \sqrt{2}a$
- Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a: $h = \sqrt{3}\frac{a}{2}$



- **Höhensatz:** In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächengleich zum Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten. $h^2 = p \cdot q$



5.2.Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck



- $\sin\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \dfrac{a}{c}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \dfrac{b}{c}$
- $\tan\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \dfrac{a}{b}$
- $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$; $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$; $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- Besondere Werte:

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
cos	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.

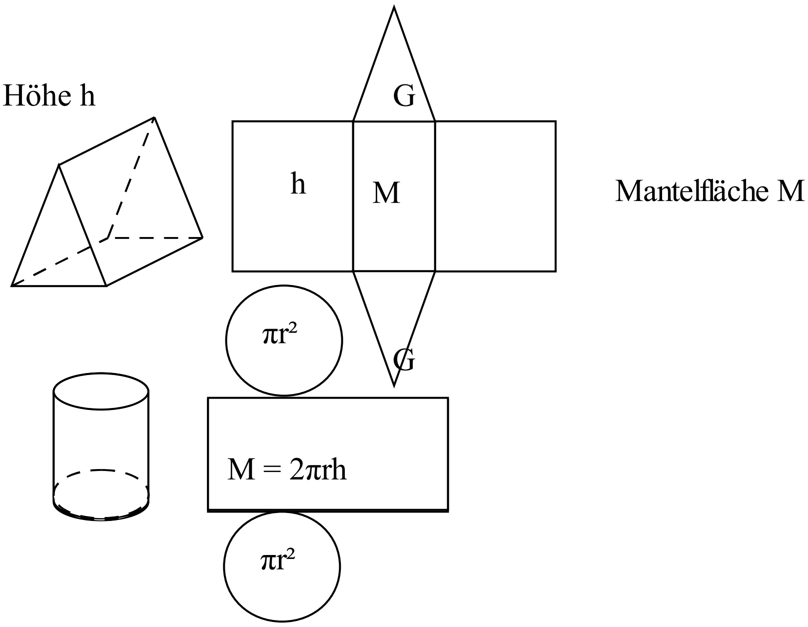
<u>6.Raumgeometrie</u>

6.1. Prisma und Zylinder

- Netz des Prismas:

- Netz des Zylinders:

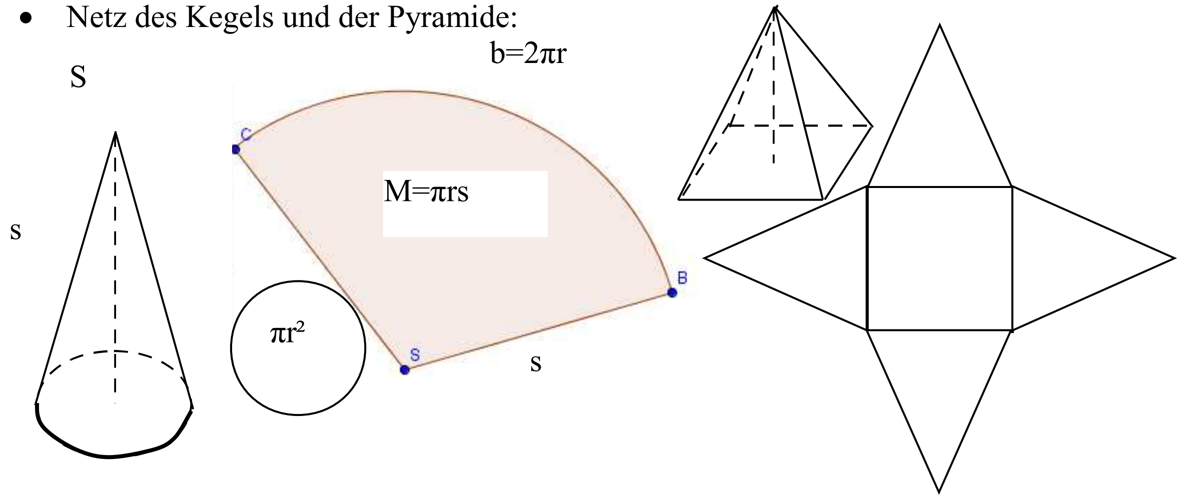
  Höhe h



- Oberfläche und Volumen des Prismas: $O_P = 2 \cdot G + M$
  $V_P = G \cdot h$
- Oberfläche und Volumen des Zylinders: $O_Z = 2 \cdot G + M = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$
  $V_Z = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$

6.2. Pyramide und Kegel

- Netz des Kegels und der Pyramide:



- Oberfläche und Volumen der Pyramide: O_P = Grundfläche + Seitenflächen
  $V_P = 1/3\ G \cdot h$

- Oberfläche und Volumen des Kegels: $O_K = \pi r^2 + \pi rs$
  $V_K = 1/3\ G \cdot h = 1/3\ \pi r^2 \cdot h$